Charakterisierung spezieller L^1-Kontraktionen durch Ungleichungen

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaften

vorgelegt beim

Fachbereich Mathematik der

Johann Wolfgang Goethe - Universität

zu Frankfurt am Main

von

Hans Engmann

aus Dettingen

1973

Frankfurt am Main

Januar 73

Gedruckt mit Genehmigung der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Frankfurt am Main

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dekan: Prof. Dr. W. Franz

Erster Berichterstatter: Prof. Dr. H.Dinges

Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. J.Weidmann

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Februar 1973

Charakterisierung spezieller L^1-Kontraktionen durch Ungleichungen

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaften

vorgelegt beim

Fachbereich Mathematik der

Johann Wolfgang Goethe - Universität

zu Frankfurt am Main

von

Hans Engmann

aus Dettingen

Frankfurt am Main

Januar 73

Inhaltsverzeichnis

0. Überblick 1

1. Durch H_R charakterisierbare Kontraktionen . . 5

2. Durch H_F charakterisierbare Kontraktionen . . 11

3. Durch H_C charakterisierbare Kontraktionen . . 27

4. Durch die Funktionale $D_\cdot^1$, $D_\cdot^\infty$, $D_\cdot$ charakterisierbare Kontraktionen 37

Anhang (Hilfsmittel) 50

Literatur 54

0. Überblick

Der individuelle Ergodensatz von Chacon-Ornstein |2|, besagt, daß für nichtnegative integrable Zufallsvariable $x_1, x_2, \ldots; p_1, p_2, \ldots$ auf einem σ-endlichen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$\lim_n x_1+\ldots+x_n / p_1+\ldots+p_n$ P-f.s. auf $\{\sum_1^\infty p_n > 0\}$ existiert,

wenn folgende Voraussetzung erfüllt ist:

(i) Es gibt eine positive, lineare L^1-Kontraktion mit $Tx_n = x_{n+1}$, $Tp_n = p_{n+1}$ für alle $n \in N$.

Man kann leicht zeigen, daß (i) folgende Aussage impliziert:

(ii) $\int_\Omega h(x_1, x_2, \ldots; p_1, p_2, \ldots) dP \geq \int_\Omega h(x_2, x_3, \ldots; p_2, p_3, \ldots) dP$

für alle nichtnegativen, stetigen, konvexen Funktionen h auf $R^N \times R^N$.

Wesentliche Teilaussagen zum Beweis des Ergodensatzes |2| lassen sich schon allein aus (ii) folgern, z. B. das Maximallemma 2.2.1 und Theorem 2.4.2 aus |9|.

Der Versuch liegt nahe, die Existenz des Ergodenlimes aus (ii) abzuleiten, um eine Verallgemeinerung des Ergodensatzes zu bekommen. Dieses Vorgehen kann jedoch keine Verallgemeinerung liefern, weil (i) aus (ii) folgt

Wir führen den Beweis hierfür folgendermaßen auf die Anwendung einer Sandwich-Version des Satzes von Hahn-Banach zurück:

(1) Wir geben einen Vektorraum U an derart, daß jedes lineare Funktional μ auf U eine lineare Abbildung $f \to \mu_f$ der

integrablen Zufallsvariablen in die additiven Mengenfunktionen auf $\mathcal{A}$ definiert und setzen $T_\mu f$ fest als Radon-Nikodym-Ableitung des Bildes μ_f von f unter dies Abbildung. Die dadurch erklärte Abbildung $f \dashrightarrow T_\mu f$ is linear.

(2) Wir geben ein superlineares Funktional σ und ein sublineares Funktional κ auf U an so, daß für jedes line Funktional μ T_μ eine positive, die L^1-Norm kontrahie de Abbildung ist, falls $\sigma \leq \mu \leq \kappa$.

(3) Wir geben einen Unterraum V von U an und ein lineares Funktional λ auf V so, daß für jedes $n \in N$ und jede lineare Fortsetzung μ von λ auf ganz U gilt
$T_\mu x_n = x_{n+1}$, $T_\mu p_n = p_{n+1}$.

(4) Wir weisen nach, daß die im "Sandwich-Satz" formuliert hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz einer linearen Fortsetzung μ von λ auf ganz U mit $\sigma \leq \mu \leq \kappa$ erfüllt ist, wenn (ii) gilt.

Modifikationen dieser Beweisidee werden zu Charakterisierun der Kontraktionen, wie sie in den Ergodensätzen aus |1|,|2|,|3|,|10| auftreten, durch Ungleichungen führen.

Wir werden eine etwas allgemeinere Situation als in den erwähnten Ergodensätzen zugrundelegen, nämlich <u>statt Folgen</u> $\{x_k\}$, $\{p_k\}$ Familien $\{x_k : k \in K\}$, $\{p_j : j \in I\}$ integrabler ZV einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sowie Familien $\{y_k : k \in K\}$, $\{q_j : j \in I\}$ integrabler ZV auf einem zweiten Maßraum $(\Omega', \mathcal{A}', P')$, wobei <u>I, K beliebige Indexmengen</u>.

In 1. werden wir die x_k, p_j, y_k, q_j als nichtnegativ voraussetzen und die positiven linearen Kontraktionen $T : L^1(P) \dashrightarrow L^1(P')$ mit $Tx_k \geq y_k$ für alle $k \in K$ und $Tp_j \leq q_j$ für alle $j \in I$ durch Ungleichungen wie in (ii) für alle h aus einem Kegel H_R^+ nichtnegativer Funktionen auf $R^K \times R^I$ charakterisieren.

In 2. werden wir für den Spezialfall $K = I = N$ die fallenden Folgen $\{T_n\}$ positiver linearer Kontraktionen von $L^1(P)$ in $L^1(P')$ mit $T_n x_n \geq y_n$, $T_n p_n \leq q_n$ für alle $n \in N$ charakterisieren durch Ungleichungen wie in (ii) für alle h aus einem Unterkegel H_F^+ von H_R^+.

In 3. werden wir für komplexwertige x_k, y_k sowie nichtnegative p_j, q_j die linearen Kontraktionen $T : L_C^1(P) \dashrightarrow L_C^1(P')$ mit $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$ und $|T|p_j \leq q_j$ für alle $j \in I$ ($|T|$ = Betrag von T |14|) charakterisieren durch Ungleichungen wie in (ii) für alle Elemente eines Kegels H_C^+ von nichtnegativen Funktionen auf $C^K \times R^I$.

In 4. gehen wir von x_k, y_k aus, die ihre Werte in einem reflexiven Banachraum B annehmen. Es ist uns in diesem Fall nicht gelungen, einen Funktionenkegel anzugeben, so daß Ungleichungen wie in (ii) für die Elemente dieses Kegels die starken Kontraktionen T von $L_B^1(P)$ in $L_B^1(P')$ (siehe |10|) mit $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$ charakterisieren würden. Wir leiten aber aus

$\{x_k\}$ bzw. $\{y_k\}$ Funktionale D_x^1, D_x^∞, D_x bzw. D_y^1, D_y^∞, D_y ab und charakterisieren die obigen Kontraktionen durch Unglei chungen zwischen diesen Funktionalen.

Unter einer ZV f auf einem Maßraum verstehen wir die Äquivalenzklasse aller meßbaren Funktionen, die mit f fast sicher übereinstimmen. Dementsprechend gelten Ungleichunge und Limesaussagen für ZV stets nur fast überall.
N bezeichnet die natürlichen Zahlen, R die reellen, C die komplexen. Re steht für Realteil, Im für Imaginärteil. Der Positivteil einer reellen Zahl a bzw. einer reellen Funkti f wird mit a^+ bzw. f^+ bezeichnet, die Menge der positiven Elemente eines Kegels K reeller Funktionen mit K^+ oder K_+. Die Bezeichnungen $L_B^p(P)$, $\| \ \|_p$ für einen Banachraum B und $1 \leq p \leq \infty$ stimmen mit denen in |11| überein.
Kontraktion bedeutet in der gesamten Arbeit ohne Ausnahme lineare Kontraktion. Die nichtnegativen Elemente von $L_R^1(P)$ bezeichnen wir mit $L_+^1(P)$.

Herrn Prof. Dr. H.Dinges danke ich für seine Anregungen, Literaturhinweise und seine geduldigen Ratschläge beim Erstellen der endgültigen Fassung dieser Arbeit. Wesentliche Denkansätze verdanke ich Herrn Prof. Dr. H.Rost.

1. DURCH H_R CHARAKTERISIERBARE KONTRAKTIONEN

Im gesamten Kapitel 1. seien

$(\Omega,\mathfrak{A},P),(\Omega',\mathfrak{A}',P')$ σ-endliche Maßräume mit positiven Maßen P,P', I,K Indexmengen,

$x = \{x_k : k\in K\}$, $p = \{p_j : j\in I\}$ Familien von Elementen aus $L_+^1(P)$,

$y = \{y_k : k\in K\}$, $q = \{q_j : j\in I\}$ Familien von Elementen aus $L_+^1(P')$,

Wir geben einen Kegel H_R von Funktionen an, die $R^K \times R^I$ in R abbilden, so daß gilt: Genau dann existiert eine positive Kontraktion von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$ mit $Tx_k \geq y_k$ für alle $k \in K$ und $Tp_j \leq q_j$ für alle $j \in I$, wenn $\int_\Omega h(x,p)dP \geq$

$\geq \int_{\Omega'} h(y,q)dP'$ für alle $h \in H_R^+$.

Die "Konstruktion" von T benutzt die Sandwich-Version (A4) des Satzes von Hahn-Banach für den Vektorraum $U = L_R^1(P)\otimes_R S_{\Omega'}$, ($S_{\Omega'}$ Stufenfunktionen auf $(\Omega',\mathfrak{A}')$), den Unterraum $V = \{0\}$ sowie je ein sub- und superlineares Funktional.

Wir finden ein lineares Funktional λ zwischen zwei Funktionalen σ und κ. Durch $\lambda_f(A') = \lambda(f\otimes\chi_{A'})$ für alle $A' \in \mathfrak{A}'$ wird eine endlich-additive Mengenfunktion λ_f auf $\mathfrak{A}'$ definiert. für jedes $f \in L_+^1(P)$ setzen wir Tf fest als Radon-Nikodym-Ableitung von λ_f (siehe A2) und zeigen, daß T eine positive Kontraktion von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$ ist mit den gewünschten Eigenschaften.

Wir bezeichnen die Punkte von $R^K \times R^I$ mit $(\xi,\eta) = (\{\xi_k\},\{\eta_j\})$, wobei ξ_k, $\eta_j \in R$ für alle $k \in K$ und $j \in I$.

Definition 1.1:

Jeder Familie $\{(a_{ik},b_{ij})\colon i \in N, j \in I, k \in K\}$ mit $a_{ik} \geq 0$, $b_{ij} \geq 0$, $a_{ik} = 0$ und $b_{ij} = 0$ bis auf endlich viele, ordnen wir eine Funktion h von $R^K \times R^I$ in R zu dur

$$h(\xi,\eta) = \max_i \left(\sum_k a_{ik}\xi_k - \sum_j b_{ij}\eta_j\right).$$

Die Menge dieser Funktionen heiße H_R.

Satz 1.2:

Sei T eine positive Kontraktion von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$.

Es gelte $Tx_k \geq y_k$ für alle $k \in K$

und $Tp_j \leq q_j$ für alle $j \in I$.

Dann gilt $\int_\Omega h(x,p)dP \geq \int_\Omega, h(y,q)dP'$ für alle $h \in H_R^+$.

Beweis:

(1) Seien $f_1,\ldots, f_n \in L_R^1(P)$. Dann gilt

$$T\left(\max_i f_i\right) \geq \max_i (Tf_i)$$

(2) Sei $\{(a_{ik},b_{ij})\}$ eine Familie wie in Definition 1.1,

h die zugeordnete Funktion aus H_R. Dann folgt aus (

$$T\, h^+(x,p) \geq \max_i T\left(\sum_k a_{ik}x_k - \sum_j b_{ij}p_j\right)^+,$$

und wegen der Linearität von T sowie aus $Tx_k \geq y_k$ f

alle $k \in K$ und $Tp_j \leq q_j$ für alle $j \in I$ ergibt sich

$$T\, h^+(x,p) \geq h^+(y,q).$$

(3) Da T eine positive Kontraktion ist, folgt für h mit (2)

$\int_\Omega h^+(x,p)dP \geq \int_{\Omega'} Th^+(x,p)dP' \geq \int_{\Omega'} h^+(y,q)dP'$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Definition 1.3:

Sei $S_{\Omega'}$ der Raum der P'-Äquivalenzklassen von integrablen Zufallsvariablen auf $(\Omega',\mathcal{A}')$ mit endlich vielen Werten, U der Vektorraum $L^1_R(P) \otimes_R S_{\Omega'}$. Wenn $u \in U$ und $\Sigma f_i \otimes \chi_{A'_i}$ eine Normaldarstellung von u (siehe A3), dann setzen wir

(i) $\sigma(u) = \Sigma_i \int_{A'_i} \sup_{h \in H(f_i)} h(y,q)dP'$, wobei das Supremum im vollständigen Verband der (P'-Äquivalenzklassen von) Zufallsvariablen auf $(\Omega',\mathcal{A}')$ gebildet ist und für $f \in L^1_R(P)$ gesetzt ist

$H(f) = \{h \in H_R : h(x,p) \leq f\}$.

Das sup über die leere Menge wird gleich $-\infty$ gesetzt.

(ii) $\kappa(u) = \int_\Omega \max_i f_i^+ \, dP$

Satz 1.4:

Seien U, κ, σ definiert wie oben, λ ein lineares Funktional auf U.

(i) Für jedes $f \in L^1_+(P)$ wird durch $\lambda_f(A') = \lambda(f \otimes \chi_{A'})$ eine positive additive Mengenfunktion auf $\mathcal{A}'$ definiert.

Für jedes $f \in L_+^1(P)$ sei Tf die Radon-Nikodym-Ablei

von λ_f bezüglich P' (siehe A 2). Dann gilt:

(ii) $T(f+g) = Tf + Tg$ für alle $f,g \in L_+^1(P)$

$T(af) = aTf$ für alle $a \geq 0$ und alle $f \in L_+^1(P)$.

$Tf \geq 0$ für alle $f \in L_+^1(P)$.

(iii) Wenn $\lambda \leq \kappa$, dann $\int_\Omega, Tf\, dP' \leq \int_\Omega f\, dP$ für alle $f \in L$

(iv) Wenn $\lambda \geq \sigma$, dann $Tx_k \geq y_k$ für alle $k \in K$

(v) Wenn $\lambda \geq \sigma$, dann $Tp_j \leq q_j$ für alle $j \in I$.

Beweis:

(i), (ii), (iii) sind identisch mit den Aussagen

(a) (i), (a) (ii), (b) (ii) von Satz 2.6 und werden dort

bewiesen.

Wir beweisen (iv) und (v).

(iv): Sei $k \in K$, h die durch $h(\xi,\eta) := \xi_k$ definierte

Funktion aus H_R. Dann folgt für jedes $A' \in \mathcal{A}'$

$\int_{A'} Tx_k dP' \geq \sigma(x_k \otimes \chi_{A'}) \geq \int_{A'} y_k dP'$,

Wobei sich die erste Ungleichung daraus ergibt, d

das unbestimmte Integral $\int . \sup_{h \in H(x_k)} h(y,q)dP'$ ein

endliches, P'-absolutstetiges Maß auf $\mathcal{A}'$ ist, und

die zweite Ungleichung aus $\sup_{h \in H(x_k)} h(y,q) \geq y_k$ fol

(v): Sei $k \in K$. Da das unbestimmte Integral $\int .(-q_k)dP'$ σ-additiv und P'-absolutstetig ist, folgt für die eindeutige lineare Fortsetzung (siehe |14|) von T auf ganz $L^1_R(P)$, daß $\int_{A'} T(-p_k)dP' \geq \int_{A'} T(-q_k)dP'$ für alle $A' \in \mathcal{A}'$, weil die Funktion $h(\xi,\eta) = -\eta_k$ aus $H(-p_k)$. Es folgt $Tp_k \leq q_k$.

Satz 1.5:

Es gelte $\int_\Omega h(x,p)dP \geq \int_{\Omega'} h(y,q)dP'$ für alle $h \in H^+_R$.
Dann gibt es eine positive Kontraktion T von $L^1_R(P)$ in $L^1_R(P')$ mit $Tx_k \geq y_k$ für alle $k \in K$ und $Tp_j \leq q_j$ für alle $j \in I$.

Zum Beweis genügt es, folgende beide Sätze zu verifizieren:

Satz 1.6:

(i) κ sublinear und endlich
(ii) σ superlinear

Satz 1.7:

Wenn $\int_\Omega h(x,p)dP \geq \int_{\Omega'} h(y,q)dP'$ für alle $h \in H^+_R$,
dann gilt $\sigma(u) \leq \kappa(u)$ für alle $u \in U$.

Mit Hilfe der Sandwich-Version des Satzes von Hahn-Banach (A 4) folgt nämlich daraus die Existenz eines linearen Funktionals λ mit $\sigma \leq \lambda \leq \kappa$ und aus den Aussagen von Satz 1.4 die Existenz einer Kontraktion T mit den gewünschten Eigenschaften.

In den Beweisen zu den Sätzen 2.9 und 2.10 kann die Voraussetzung $I = K = N$ fallengelassen werden. Mit diese Modifikation sind es Beweise zu 1.6 und 1.7.

Setzt man speziell $I = K = N$, $p_m = x_m$, $q_m = y_m$ für $m = k$ so erhält man:

Korollar 1.8 |15|:

Sei $\{x_m : m \in N\}$ bzw. $\{y_m : m \in N\}$ eine Folge aus $L_+^1(P)$ bzw. $L_+^1($ Genau dann gibt es eine positive Kontraktion T von $L_R^1(P)$ $L_R^1(P')$ mit $Tx_m = y_m$ für alle $m \in N$, wenn $\int_\Omega h(x)dP \geq \int_\Omega ,h$ für alle nichtnegativen, positiv-homogenen, konvexen Fun tionen auf R^N.

Beweis:

Jede nichtnegative, positiv-homogene, konvexe Funktion a R^N ist monotoner Limes einer Folge von Funktionen aus H_R^+ Die Behauptung des Korollars folgt daher mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz aus 1.2 und 1.5.

2. DURCH H_F CHARAKTERISIERBARE KONTRAKTIONEN

Im gesamten Kapitel seien

$(\Omega,\mathfrak{A},P)$, $(\Omega',\mathfrak{A}',P')$ σ-endliche Maßräume mit P, P' positiv,

$x = \{x_k : k\in N\}$ eine Folge von Elementen aus $L_+^1(P)$,

$y = \{y_k : k\in N\}$ eine Folge von Elementen aus $L_+^1(P')$,

$p = \{p_k : k\in N\}$ eine Folge von Elementen aus $L_+^1(P)$,

$q = \{q_k : k\in N\}$ eine Folge von Elementen aus $L_+^1(P')$.

Cuculescu und Foias haben den Fall $(\Omega,\mathfrak{A},P)=(\Omega',\mathfrak{A}',P')$, $y_1=q_1=0$, $y_k=x_{k+1}$, $q_k=p_{k+1}$ für $k\geq 2$ betrachtet und in |3| bewiesen, daß

$x_1+\ldots+x_n/p_1+\ldots+p_n$ P-f.s. konvergiert auf $\{\sum_1^\infty p_k>0\}$,

wenn die Folgen x und p derart sind, daß eine Folge $\{T_m : m\in N\}$ positiver Kontraktionen von $L_R^1(P)$ in sich existiert mit (i) $T_m f \geq T_{m+1} f$ für alle $f \in L_+^1(P)$ und alle $m \in N$

und (ii) $T_m x_m \geq x_{m+1}$ und $T_m p_m \leq p_{m+1}$ für alle $m \in N$.

Wir wollen in diesem Kapitel die Bedingungen (i) und (ii) an x, p durch Ungleichungen der in 1. verwendeten Art beschreiben. Das folgende Beispiel zeigt, daß x, p den Bedingungen (i) und (ii) genügen können, obwohl $\int_\Omega h(x_1,\ldots;p_1,\ldots)dP \geq \int_\Omega h(x_2,\ldots;p_2,\ldots)dP$ nicht für alle nichtnegativen h aus dem in Definition 1.1 erklärten Kegel H_R gilt.

Beispiel 2.1:

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum seien folgende Zufallsvariablen: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = x_4 = \ldots = 0$,

$p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = \frac{1}{4}$, $p_4 = p_5 = \ldots = 0$,

und folgende Kontraktionen:

$T_1 = I$, $T_2 = \frac{1}{4}I$, $T_3 = T_4 = \ldots = 0$, wo I die Identität, erklärt.

Dann gilt offenbar für jede positive integrable Zufallsvariable f $T_1 f \geq T_2 f \geq T_3 f = T_4 = \ldots = 0$.

Ferner gilt

$T_1 x_1 = 1 > x_2$, $T_2 x_2 = \frac{1}{8} > x_3$, $T_3 x_3 = T_4 x_4 = \ldots = 0$,

$T_1 p_1 = 0 < p_2$, $T_2 p_2 = \frac{1}{4} = p_3$, $T_3 p_3 = T_4 p_4 = \ldots = 0$.

Es existiert aber keine positive Kontraktion T auf den integrablen Zufallsvariablen mit $Tx_m \geq x_{m+1}$ und $Tp_m \leq p_{m+1}$ für alle $m \in N$, weil für ein solches T gelten müßte $\frac{1}{2} = x_2 \leq Tx_1 = Tp_2 \leq p_3 = \frac{1}{4}$.

Wir geben aber einen Unterkegel H_F von H_R an, so daß folgendes gilt: Genau dann gibt es eine Folge $\{T_m : m \in N\}$ positiver Kontraktionen von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$ mit $T_m x_m \geq y_m$ und $T_m p_m \leq q_m$ sowie $T_m f \geq T_{m+1} f$ für alle $m \in N$ und alle $f \in L_+^1(P)$, wenn $\int_\Omega h(x,p)dP \geq \int_\Omega h(y,q)dP'$ für alle $h \in H_F$.

Die "Konstruktion" der T_m verwendet die Sandwich-Version des Satzes von Hahn-Banach auf dem Vektorraum $U = L_R^1(P) \otimes_R S_\Omega$,. Wir finden nämlich für jedes $m \in N$ ein lineares Funktional λ_m auf U, das über einem Funktional σ und unter Funktionalen π_m, τ_m liegt. Für jedes $m \in N$ und

jedes $f \in L_+^1(P)$ leiten wir aus λ_m eine positive additive Mengenfunktion $(\lambda_m)_f$ auf $\mathcal{A}'$ ab. Setzt man $T_m f$ fest als Radon-Nikodym-Ableitung von $(\lambda_m)_f$ bezüglich P' (siehe A2), so erhalten wir die gewünschte Folge $\{T_m : m \in N\}$.

Wir bezeichnen die Punkte von $R^N \times R^N$ mit $(\xi,\eta) := (\xi_1,\ldots;\eta_1,\ldots)$, wobei $\xi_m, \eta_m \in R$.

Definition 2.2:

Jeder Folge $\{(a_{ijk}, b_{ijk}) : i,j,k \in N\}$ mit $a_{ijk} \geq 0$, $b_{ijk} \geq 0$, $a_{ijk} = 0$ und $b_{ijk} = 0$ bis auf endlich viele (i,j,k), ordnen wir eine Funktion h von $R^N \times R^N$ nach R zu durch

$$h(\xi,\eta) := \max_i \sum_j \max_n \sum_{k=1}^{n} (a_{ijk}\xi_k - b_{ijk}\eta_k).$$

Die Menge dieser Funktionen nennen wir H_F.

Bemerkung 2.3:

(i) H_F ist der kleinste gegen (punktweise) Maxima abgeschlossene konvexe Kegel, der alle Funktionen

$$h(\xi,\eta) = \max_n \sum_{k=1}^{n} (a_k\xi_k - b_k\eta_k), \text{ wo } a_k \geq 0,\ b_k \geq 0,$$

$a_k = 0$ und $b_k = 0$ bis auf endlich viele k, enthält.

Denn H_F ist nach Definition gegen Maximumsbildung ab-

geschlossen, und die für beliebige reelle r_i gelte

Identität

$\max\{r_1,r_2\} + \max\{r_3,r_4\} = \max\{r_i+r_j : i=1,2,\ j=3,4\}$

zeigt, daß H_F auch gegen Summenbildung abgeschloss

ist. Daß ein positives Vielfaches eines Elementes

H_F wieder in H_F liegt, ist trivial.

(ii) Setzt man in 1. $I = K = N$ und definiert H_R wie in Definition 1.1, dann gilt $H_R \supset H_F$. Das folgt darau daß H_R gegen Summen- und Maximumbildung abgeschlos ist und man H_F erhält, indem man Summen und Maxima speziellen Funktionen aus H_R bildet.

Satz 2.4:

Sei $\{T_m : m\in N\}$ eine Folge positiver Kontraktionen von $L^1_R(P)$ in $L^1_R(P')$. Es gelte $T_m f \geq T_{m+1} f$ für alle $f \in L^1_+(P)$ und alle $m \in N$ sowie $T_m x_m \geq y_m$ und $T_m p_m \leq q_m$ für alle m

Dann folgt $\int_\Omega h(x,p)dP \geq \int_{\Omega'} h(y,q)dP'$ für alle $h \in H_F^+$.

Beweis:

(1) Für beliebige reelle $r_1,\ldots,r_1$ gilt

$$\max_{1\leq n\leq 1} \sum_{k=1}^{n} r_k = r_1 + \left[\max_{2\leq n\leq 1} \sum_{k=2}^{n} r_k\right]^+$$

(2) Seien $f_1,\ldots,f_n \in L^1_R(P)$. Dann gilt für eine beliebi

positive Kontraktion T von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$

$T(\max_i f_i) \geq \max_i Tf_i$.

(3) Seien $f_1,\ldots,f_n \in L_R^1(P)$ mit $\max_i f_i \geq 0$. Da T_1 eine positive Kontraktion ist, folgt zusammen mit (2)

$\int_\Omega \max_i f_i \, dP \geq \int_{\Omega'} \max_i T_1 f_i \, dP'$.

(4) Sei $\{(a_{ijk}, b_{ijk})\}$ eine Folge wie in Definition 2.2, h die zugeordnete Funktion aus H_F. Aus (2), (3) und der Linearität von T_1 folgt

$$\int_\Omega h^+(x,p)dP \geq \int_{\Omega'} \left[\max_i \sum_j T_1 \max_n \sum_{k=1}^{n} (a_{ijk}x_k - b_{ijk}p_k)\right]^+ dP'.$$

Daher genügt es zum Beweis des Satzes folgendes zu zeigen:

(5) Seien $l \in N$, $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, $a_k = b_k = 0$ für $k > l$,

$$f_l^m(\xi,\eta) := \max_{m \leq n \leq l} \sum_{k=m}^{n} (a_k\xi_k - b_k\eta_k) \text{ für } 1 \leq m \leq l.$$

Dann gilt $T_1 f_1^1(x,p) \geq f_1^1(y,q)$.

Wir beweisen diese Behauptung.

Nach (1) gilt für jedes m mit $1 \leq m \leq l$

$$f_l^m(\xi,\eta) = (a_m\xi_m - b_m\eta_m) + [f_l^{m+1}(\xi,\eta)]^+.$$

Aus $T_1x_1 \geq y_1$, $T_1p_1 \leq q_1$ ergibt sich die Ungleichung

$$(U_1) \quad T_1 f_1^1(x,p) \geq (a_1y_1 - b_1q_1) + T_1[f_1^2(x,p)]^+.$$

Aus (2), $T_mx_m \geq y_m$, $T_mp_m \leq q_m$ und $T_mf \geq T_{m+1}f$ für alle $m \in N$ und alle $f \in L_+^1(P)$ ergibt sich für jedes

$m \geq 2$ die Ungleichung (eine Summe über die leere Indexmenge wird 0 gesetzt)

$$(U_m) \quad T_m\left[f_1^{m+1}(x,p)\right]^+ \geq$$

$$\geq \left[(a_{m+1}y_{m+1}-b_{m+1}q_{m+1})+T_{m+1}(f_1^{m+2}(x,p))^+\right]^+$$

Wir setzen nacheinander für $m = 1,2,\ldots,l-1$ die rec
Seite der Ungleichung U_{m+1} in die rechte Seite der Un
gleichung U_m ein und erhalten aus der Ungleichungsket
und (1)

$$T_1 f_1^1(x,p) \geq f_1^1(y,q). \qquad \text{q.e.d.}$$

Definition 2.5:

Seien $S_{\Omega'}$ der Raum der (P'-Äquivalenzklassen von) Zufallsvariablen auf $(\Omega',\mathcal{A}')$ mit endlich vielen Werten, $m \in N$. Sei U der Vektorraum $L_R^1(P) \otimes_R S_{\Omega'}$, $u \in U$, $\sum_i f_i \otimes \chi_{A_i'}$ eine Normaldarstellung (A 3) von u. Dann setzen wir

(i) $$\sigma(u) := \sum_i \int_{A_i'} \sup_{g \in H(f_i)} g(y_m,\ldots;q_m,\ldots)\, dP',$$

wobei für jedes $f \in L_R^1(P)$

$$H(f) = \{g \in H_F : g(x_m,\ldots;p_m,\ldots) \leq f\}.$$

Das auftretende Supremum wird im vollständigen Verba der (P'-Äquivalenzklassen von) Zufallsvariablen auf $(\Omega',\mathcal{A}')$ gebildet. Das Supremum über die leere Menge wird gleich $-\infty$ gesetzt.

(ii) $$\pi(u) := \begin{cases} \sum_i \int_{A_i'} \left\|\frac{f_i}{p_m}\right\|_\infty q_m dP', & \text{wenn } \max_i \left\|\frac{f_i}{p_m}\right\|_\infty < \infty \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\| \ \|_\infty$ das wesentliche Supremum im Kegel der

(P'-Äquivalenzklassen von) positiven Zufallsvariablen auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ bedeutet (∞ zugelassen) und die Konvention $\frac{0}{0} = 0$ gilt.

(iii) $\kappa(u) := \int_{\Omega} \max_i f_i^+ \, dP$.

(iv) Sei T eine positive Kontraktion von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$ mit $Th\,(x_m,\ldots;p_m,\ldots) \geq h\,(y_m,\ldots;q_m,\ldots)$ für alle $h \in H_F^+$.

Dann setzen wir

$\tau(u) := \sum_i \int_{A_i'} Tf_i^+ \, dP'$.

Satz 2.6:

Sei $m \in N$ fest. Seien U, π, σ, κ wie oben definiert, λ ein lineares Funktional auf U.

(a)(i) Für jedes $f \in L_+^1(P)$ wird durch $\lambda_f(A') := \lambda(f \otimes \chi_{A'})$ eine positive additive Mengenfunktion λ_f auf ' definiert.

(ii) Sei für jedes $f \in L_+^1(P)$ Tf die Radon-Nikodym-Ableitung (A 4) von λ_f bezüglich P'. Dann gilt

$T(f+g) = Tf + Tg$ für alle $f,g \in L_+^1(P)$,

$T(af) = aTf$ für alle $f \in L_+^1(P)$ und alle $a \geq 0$.

$Tf \geq 0$ für alle $f \in L_+^1(P)$.

(b) Sei T zu λ bestimmt wie in (a)(ii). Dann gilt:

(i) Wenn $\lambda \leq \pi$, dann $Tp_m \leq q_m$.

(ii) Wenn $\lambda \leq \kappa$, dann $\int_{\Omega}, Tf \, dP' \leq \int_{\Omega} f dP$ für alle $f \in L_+^1(P)$.

(iii) Wenn $\lambda \geq \sigma$, dann $Th(x_m,\ldots;p_m,\ldots) \geq h(y_m,\ldots;q_m,\ldots)$

für alle $h \in H_F^+$, insbesondere $Tx_m \geq y_m$.

(iv) Sei T' eine positive Kontraktion von $L_R^1(P)$ in $L_R^1($
mit $T'h(x_m,\ldots;p_m,\ldots) \geq h(y_m,\ldots;q_m,\ldots)$ für alle
$h \in H_F^+$, τ zu T' konstruiert wie in Definition 2.5
Wenn $\lambda \leq \tau$, dann $Tf \leq T'f$ für alle $f \in L_+^1(P)$.

Beweis:

(a)(i) Seien $A',B' \in \mathcal{A}'$, $A' \cap B' = \emptyset$, $f \in L_+^1(P)$. Dann gi

$$\lambda_f(A'\cup B') = \lambda(f\otimes\chi_{A'+B'}) = \lambda(f\otimes\chi_{A'})+\lambda(f\otimes\chi_{B'}) =$$

$$= \lambda_f(A')+\lambda_f(B').$$

(ii) Seien $f,g \in L_+^1(P)$. Aus (A 2) folgt

$$T(f+g) = \frac{d\lambda_{f+g}}{dP'} = \frac{d\lambda_f}{dP'} + \frac{d\lambda_g}{dP'} = Tf + Tg.$$

Sei $a \geq 0$. Dann gilt $\lambda_{af} = a\cdot\lambda_f$. Aus (A 2) folgt

$$T(af) = \frac{d\lambda_{af}}{dP'} = \frac{d(a\lambda_f)}{dP'} = a\frac{d\lambda_f}{dP'} = aTf .$$

(b)(i) Sei $A' \in \mathcal{A}'$. Dann gilt

$$\int_{A'} Tp_m dP' \leq \lambda_{p_m}(A') = \lambda(p_m\otimes\chi_{A'}) \leq \pi(p_m\otimes\chi_{A'}) =$$

$$= \int_{A'} \left\|\frac{p_m}{p_m}\right\|_\infty q_m \, dP' \leq \int_{A'} q_m \, dP'.$$

Es folgt $Tp_m \leq q_m$.

(ii) Sei $f \in L_+^1(P)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega'} Tf \, dP' \leq \lambda_f(\Omega') = \lambda(f\otimes\chi_{\Omega'}) \leq \kappa(f\otimes\chi_{\Omega'}) = \int_\Omega f \, dP$$

(iii)(1) Sei $h \in H_F^+$. Wegen $h(x_m,\ldots;p_m,\ldots)=h(x_m,\ldots;p_m,\ldots)$

gilt $h \in H(h(x_m,\ldots;p_m,\ldots))$ (siehe Def. 2.5(i))

und daher

$$h(y_m,\ldots;q_m,\ldots) \leq \sup\{g(y_m,\ldots;q_m,\ldots) : g\in H(h(x_m,\ldots;p_m,\ldots))\}.$$

(2) Das unbestimmte Integral

$\int . \sup_{g\in H(f)} g(y_m,\ldots;q_m,\ldots)dP'$ ist für jedes $f \in L_+^1(P)$ ein positives endliches P'-absolutstetiges Maß auf $\mathcal{A}'$. Daher gilt

$\int_{A'} Tf\, dP' \geq \sigma(f\otimes\chi_{A'})$ für alle $f \in L_+^1(P)$ und alle $A' \in \mathcal{A}'$.

(3) Wir wählen in (2) speziell $f = h(x_m,\ldots;p_m,\ldots)$.

Dann folgt zusammen mit (1)

$$\int_{A'} Th(x_m,\ldots;p_m,\ldots)dP' \geq \int_{A'} h(y_m,\ldots;q_m,\ldots)dP'$$

für alle $A' \in \mathcal{A}'$,

also $Th(x_m,\ldots;p_m,\ldots) \geq h(y_m,\ldots;q_m,\ldots)$.

Sei nun speziell h die durch $h(\xi,\eta) = \xi_m^+$ definierte Funktion aus H_F^+.

Dann gilt nach dem Vorhergehenden

$$Tx_m=Th(x_m,\ldots;p_m,\ldots)\geq h(y_m,\ldots;q_m,\ldots)=y_m.$$

Sei nun $h : R^N \times R^N \to R$ die identisch verschwindende Funktion, $f \in L_+^1(P)$. Dann gilt $h \in H(f)$ und daher

$$\sup_{g\in H(f)} g(y_m,\ldots;q_m,\ldots) \geq h(y_m,\ldots;q_m,\ldots) = 0.$$

Nach (2) gilt $Tf \geq \sup_{g \in H(f)} g(y_m,\ldots;q_m,\ldots)$ und

daher $Tf \geq 0$.

(iv) Sei $f \in L_+^1(P)$, $A' \in \mathcal{A}'$. Dann gilt

$$\int_{A'} Tf\, dP' \leq \lambda_f(A') = \lambda(f\otimes\chi_{A'}) \leq \tau(f\otimes\chi_{A'}) =$$

$$= \int_{A'} T'f^+ dP' = \int_{A'} T'f\, dP', \text{ also } Tf \leq T'f.$$

q.e.d.

Satz 2.7:

(i) Es gelte $\int_\Omega h(x,p)dP \geq \int_{\Omega'} h(y,q)dP'$ für alle $h \in H_F^+$.

Dann gibt es eine positive Kontraktion T' von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$ mit $T'h(x,p) \geq h(y,q)$ für alle $h \in H$

(ii) Sei $m \in N$, T' eine positive Kontraktion von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$ mit $T'h(x_m,\ldots;p_m,\ldots) \geq h(y_m,\ldots;q_m,\ldots$ für alle $h \in H_F^+$ und $T'p_m \leq q_m$.

Dann gibt es eine positive Kontraktion T von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$ mit $Th(x_{m+1},\ldots;p_{m+1},\ldots) \geq h(y_{m+1},\ldots;q_{m+1},\ldots$ für alle $h \in H_F^+$, $Tp_{m+1} \leq q_{m+1}$ und $Tf \leq T'f$ für alle $f \in L_+^1(P)$.

Wir stellen den Beweis dieses Satzes zurück und ziehen zunächst eine Folgerung, nämlich

Satz 2.8:

Es gelte $\int_\Omega h(x,p)dP \geq \int_{\Omega'} h(y,q)dP'$ für alle $h \in H_F^+$.

Dann gibt es eine Folge $\{T_m : m \in N\}$ positiver Kontraktionen von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$ mit

$T_m f \geq T_{m+1} f$ für alle $f \in L_+^1(P)$ und alle $m \in N$,

$T_m x_m \geq y_m$ und $T_m p_m \leq q_m$ für alle $m \in N$.

Beweis:

(1) Nach 2.7 (i) gibt es eine positive Kontraktion T_1 von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$ mit $T_1 h(x,p) \geq h(y,q)$ für alle $h \in H_F^+$ und $T_1 p_1 \leq q_1$.

Da insbesondere die Funktion $h(\xi,\eta) = \xi_1^+$ in H_F^+ liegt, folgt $T_1 x_1 \geq y_1$ und $T_1 p_1 \leq q_1$.

(2) Sei $m \in N$, T_m eine positive Kontraktion von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$ mit $T_m h(x_m,\ldots;p_m,\ldots) \geq h(y_m,\ldots;q_m,\ldots)$ für alle $h \in H_F^+$ und $T_m p_m \leq q_m$.

Nach 2.7 (ii) gibt es eine positive Kontraktion T_{m+1} von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$ mit $T_{m+1} h(x_{m+1},\ldots;p_{m+1},\ldots) \geq$ $\geq h(y_{m+1},\ldots;q_{m+1},\ldots)$ für alle $h \in H_F^+$, insbesondere also auch $T_{m+1} x_{m+1} \geq y_{m+1}$, $T_{m+1} p_{m+1} \leq q_{m+1}$ und $T_{m+1} f \leq T_m f$ für alle $f \in L_+^1(P)$.

(3) Wir konstruieren die gewünschte Folge $\{T_m\}$ durch vollständige Induktion nach m:

Nach (2) gibt es zu der in (1) definierten positiven Kontraktion T_1 eine positive Kontraktion T_2 mit $T_2 f \leq T_1 f$ für alle $f \in L_+^1(P)$, $T_2 h(x_2,\ldots;p_2\ldots) \geq$ $\geq h(y_2,\ldots;q_2\ldots)$ für alle $h \in H_F^+$ und $T_2 p_2 \leq q_2$.

Seien für $2 \leq m \leq n$ positive Kontraktion T_m definiert mit $T_{m-1}f \geq T_m f$ für alle $f \in L^1_+(P)$, $T_m h(x_m,\ldots;p_m,\ldots) \geq$ $\geq h(y_m,\ldots;q_m,\ldots)$ für alle $h \in H_F^+$ und $T_m p_m \leq q_m$. Dann existiert nach (2) eine positive Kontraktion T_{n+1} von $L^1_R(P)$ in L^1_R mit $T_{n+1}f \leq T_n f$ für alle $f \in L^1_+(P)$, $T_{n+1}h(x_{n+1},\ldots;p_{n+1})$ $\geq h(y_{n+1},\ldots;q_{n+1},\ldots)$ für alle $h \in H_F^+$, insbesondere als $T_{n+1}x_{n+1} \geq y_{n+1}$ und $T_{n+1}p_{n+1} \leq q_{n+1}$.

q.e.d.

Zum Beweis von Satz 2.7 genügt es, die in den beiden folgenden Sätzen zusammengefaßten Aussagen zu verifizier

Satz 2.9:

Seien $m \in N, \kappa, \pi, \sigma$ wie in Definition 2.5. Dann gilt

(i) κ sublinear und endlich.

(ii) Sei T eine positive Kontraktion von $L^1_R(P)$ in $L^1_R(P')$, τ definiert wie in Definition 2.5 (iv). Dann ist τ sublin und endlich.

(iii) π sublinear,

(iv) σ superlinear.

Satz 2.10:

Seien U, κ, π, σ wie in Definition 2.5 definiert.

Seien $u, v, w \in U$ mit $u = v+w$, $m \in N$.

(i) Wenn $\int_\Omega h(x,p)\, dP \geq \int_{\Omega'} h(y,q)\, dP'$ für alle $h \in H_F^+$,

dann gilt $\sigma(u) \leq \kappa(v) + \pi(w)$.

(ii) Sei T eine positive Kontraktion von $L_R^1(P)$ in $L_R^1(P')$ mit $Th(x_m,\ldots;p_m,\ldots) \geq h(y_m,\ldots;q_m,\ldots)$ für alle $h \in H_F^+$ und $Tp_m \leq q_m$. τ sei T zugeordnet wie in Definition 2.5 (iv).

Dann gilt $\sigma(u) \leq \tau(v) + \pi(w)$.

Mit Hilfe der Sandwich-Version (A 4) des Satzes von Hahn-Banach ergibt sich nämlich dann die Existenz eines linearen Funktionals λ auf U mit $\sigma \leq \lambda \leq \min\{\kappa,\pi\}$ bzw. $\sigma \leq \lambda \leq \min\{\tau,\pi\}$, und die Behauptungen von Satz 2.7 folgen unmittelbar aus Satz 2.6.

Beweis von 2.9:

Seien $u, v \in U$, $\Sigma f_i \otimes \chi_{A_i}$ bzw. $\Sigma g_i \otimes \chi_{A_i'}$ eine Normaldarstellung (siehe A 3) von u bzw. v.

Wir beweisen nur die am wenigsten trivialen Behauptungen, nämlich

(1) π subadditiv: Wenn $\pi(u) = \infty$ oder $\pi(v) = \infty$, dann ist nichts zu zeigen. Im anderen Fall gilt wegen

$$\max_i \left|\frac{f_i+g_i}{p_m}\right| \leq \max_i \left|\frac{f_i}{p_m}\right| + \max_i \left|\frac{g_i}{p_m}\right| < \infty \text{ auch } \pi(u+v) < \infty,$$

und die Behauptung folgt aus $|f_i+g_i| \leq |f_i| + |g_i|$.

(2) σ superadditiv: H_F ist ein konvexer Kegel, also $H_F + H_F \subset H_F$. Daher gilt für beliebiges $f, g \in L_R^1(P)$ $H(f) + H(g) \subset H(f+g)$ und somit

$$\sup_{h\in H(f)} h(y_m,\ldots;q_m,\ldots) + \sup_{h\in H(g)} h(y_m,\ldots;q_m,\ldots) \leq$$

$$\leq \sup_{h\in H(f+g)} h(y_m,\ldots;q_m,\ldots).$$

Beweis von 2.10:

Seien $u, v, w \in U$, $\Sigma e_i \otimes \chi_{A_i'}$ bzw. $\Sigma f_i \otimes \chi_{A_i'}$ bzw. $\Sigma g_i \otimes \chi_{A_i'}$ eine Normaldarstellung von u bzw. v bzw. w. Es gelte $u = v + w$. Wenn $\sigma(u) = -\infty$ oder $\pi(w) = \infty$, dann folgen die Behauptungen trivialerweise. Wir setzen daher voraus, daß $\sigma(u) > -\infty$ und $\pi(w) < \infty$.

(i) $\sigma(u) - \pi(w)$

$$= \Sigma_i \int_{A_i'} \Big[\sup_{h \in H(e_i)} h(y_1,\ldots;q_1,\ldots) - \Big\|\frac{g_i}{p_1}\Big\|_\infty q_1 \Big] dP'$$

$$\leq \int_{\Omega'} \max_i \sup_{h \in H(e_i)} \Big[h(y_1,\ldots;q_1,\ldots) - \Big\|\frac{g_i}{p_1}\Big\|_\infty q_1\Big]^+ dP'$$

$$\leq \int_\Omega \max_i \sup_{h \in H(e_i)} \Big[h(x,p) - \Big\|\frac{g_i}{p_1}\Big\|_\infty p_1\Big]^+ dP \qquad \text{(Vor. u. mon. Konv.}$$

$$\leq \int_\Omega \max_i (e_i - g_i)^+ dP \qquad (h(x,p) \leq e_i, \Big\|\frac{g_i}{p_1}\Big\|_\infty p_1 \geq g_i)$$

$$= \int_\Omega \max_i f_i^+ \, dP \qquad (e_i = f_i + g_i)$$

$$= \kappa(v).$$

(ii)(1) Seien $r_1,\ldots,r_l$ reelle Zahlen. Dann gilt

$$\max_{1 \leq n} \sum_1^n r_k = r_1 + \Big[\max_{2 \leq n} \sum_2^n r_k\Big]^+.$$

(2) Seien r, r_{jk} reell, nur endlich viele $r_{jk} \neq 0$. Dann folgt aus (1)

$$\sum_{j=1}^{j_0} \max_{1 \leq n} \sum_{k=1}^n r_{jk} + r = \sum_{j=1}^{j_0} \Big[(r_{j1} + \frac{r}{j_0}) + (\max_{2 \leq n} \sum_{k=2}^n r_{jk})^+\Big] =$$

$$= \sum_{j=1}^{j_0} \max_{1 \leq n} \sum_{k=1}^n r'_{jk} \text{ mit } r'_{jk} = \begin{cases} r_{jk} + \frac{r}{j_0}, & \text{wenn } k = 1 \\ r_{jk} & \text{sonst} \end{cases}$$

(3) Sei $\{(a_{jk},b_{jk})\}$ eine Folge mit $a_{jk} \geq 0$, $b_{jk} \geq 0$, $a_{jk} = 0$ und $b_{jk} = 0$ bis auf endlich viele. Sei $b \geq 0$, $j_0 \in N$,

$$b'_{jk} = \begin{cases} b_{jk} + \frac{b}{j_0}, k=1 \\ b_{jk} \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Wir ordnen $\{(a_{jk},b_{jk})\}$ die Funktion

$$h(\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{j_0} \max_{1 \leq n} \sum_{k=1}^{n} (a_{jk}\xi_k - b_{jk}\eta_k) \text{ aus } H_F \text{ zu.}$$

h' sei die Funktion aus H_F, die man durch Ersetzen von b_{jk} durch b'_{jk} erhält. Dann folgt aus (2)

$$h'(\xi,\eta) = h(\xi,\eta) - b\eta_1$$

(4) Seien $\{(a_{ijk},b_{ijk})\}$ eine Folge wie in Definition 2.2, $j_0 \in N$ so, daß $a_{ijk} = b_{ijk} = 0$ für $j > j_0$,

$$b'_{ijk} = \begin{cases} b_{ijk} + \|\frac{g_i}{p_m}\|_\infty, \text{ wenn } k = 1 \\ b_{ijk} \quad \text{sonst} \end{cases}$$

h die $\{(a_{ijk},b_{ijk})\}$ zugeordnete Funktion aus H_F,

h' die $\{(a_{ijk},b'_{ijk})\}$ zugeordnete Funktion aus H_F.

Aus (3) folgt

$$h(y_m,\ldots;q_m,\ldots) - \|\frac{g_i}{p_m}\|_\infty q_m = h'(y_m,\ldots;q_m,\ldots).$$

Seien h, h' die in (4) definierten Funktionen. Dann folgt

(5) $\sigma(u) - \tau(v) - \pi(w)$

$$= \sum_i \int_{A'_i} \left[\sup_{h \in H(e_i)} h(y_m,\ldots;q_m,\ldots) - Tf_i^+ - \|\frac{g_i}{p_m}\|_\infty q_m\right] dP'$$

$$\leq \int_{\Omega'} \max_i \sup_{h \in H(e_i)} \left(h(y_m,\ldots;q_m,\ldots) - Tf_i^+ - \|\frac{g_i}{p_m}\|_\infty q_m\right)^+ dP'$$

$$\leq \int_{\Omega'} \max_i \sup_{h \in H(e_i)} \left[h'(y_m,\ldots;q_m,\ldots) - Tf_i^+\right]^+ dP'$$

(h' zu h bestimmt wie i

$$\leq \int_{\Omega'} \max_i \sup_{h \in H(e_i)} \left[T(f'(x_m,\ldots;p_m,\ldots))^+ - Tf_i^+\right]^+ dP' \quad (V$$

$$\leq \int_{\Omega'} T \max_i \sup \left[(h'(x_m,\ldots;p_m,\ldots))^+ - f_i^+\right]^+ dP'$$

(T linear, $T(\sup_i f_i) \geq \sup_i Tf_i$)

$$\leq \int_{\Omega} \max_i \left[(e_i - \|\frac{g_i}{p_m}\|\ p_m)^+ - f_i^+\right]^+ dP' \qquad (h \in H(e_i))$$

$$\leq \int_{\Omega} \max_i \left[(e_i - g_i)^+ - f_i^+\right]^+ dP' \qquad (\|\frac{g_i}{p_m}\|_\infty p_m \geq g_i)$$

$$= 0 \qquad (e_i = f_i + g_i)$$

q.e.d.

3. DURCH H_C CHARAKTERISIERBARE KONTRAKTIONEN

Im gesamten Kapitel seien

K, I beliebige Indexmengen

$x = \{x_k : k \in K\}$ eine Familie von Elementen aus $L_C^1(P)$,

$p = \{p_j : j \in I\}$ eine Familie von Elementen aus $L_+^1(P)$,

$y = \{y_k : k \in K\}$ eine Familie von Elementen aus $L_C^1(P')$,

$q = \{q_j : j \in I\}$ eine Familie von Elementen aus $L_+^1(P')$.

Die Punkte von $C^K \times R^I$ bezeichnen wir mit $(\xi,\eta) =$

$= (\{\xi_k\},\{\eta_j\})$, wo $k \in K$, $j \in I$.

Definition 3.1:

Jeder Familie $\{(a_{ik},b_{ij}) : i \in N, k \in K, j \in I\}$ mit $a_{ik} \in C$,

$b_{ij} \geq 0$, $a_{ik} = 0$, $b_{ij} = 0$ bis auf endlich viele i, j, k,

ordnen wir eine Funktion h von $C^K \times R^I$ nach R zu, nämlich

$$h(\xi,\eta) = \max_i \left(\left| \sum_k a_{ik}\xi_k \right| - \sum_j b_{ij}\eta_j \right).$$

Die Menge der so erhaltenen Funktionen bezeichnen wir mit H_C.

Definition 3.2 |14|:

Sei T eine Kontraktion von $L_C^1(P)$ in $L_C^1(P')$. Für jedes

$f \in L_+^1(P)$ setzen wir $|T|f = \sup \{ReT(af) : a \in C, |a|=1\}$.

Satz 3.3 |14|:

$|T|$ ist eine positive Kontraktion von $L_C^1(P)$ in $L_C^1(P')$ mit $|Tf| \leq |T||f|$ P'-f.s. für alle $f \in L_C^1(P)$.

Wir werden folgendes zeigen: Genau dann existiert eine Kontraktion T von $L_C^1(P)$ in $L_C^1(P')$ mit $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$ und $|T|p_j \leq q_j$ für alle $j \in I$, wenn für alle $h \in H$ gilt $\int_\Omega h(x,p)dP \geq \int_\Omega, h(y,q)dP'$.

Die "Konstruktion" von T benutzt die Sandwich-Version(A des Satzes von Hahn-Banach auf dem Vektorraum $U = L_C^1(P) \otimes_C S_\Omega$, mit dem Unterraum V der Elemente $u \in U$, die eine Darstellung $u = \Sigma f_i \otimes \chi_{A_i'}$ besitzen, in der für jedes i f_i eine Linearkombination der x_k ist. Wir werden auf V ein lineares Funktional λ finden, das auf ganz U s linear fortgesetzt werden kann, daß der Realteil der For setzung unter Funktionalen $\kappa, \{\pi_j : j \in I\}$ liegt. Für jedes $f \in L_C^1(P)$ wird durch $\lambda_f(A') = \lambda(f \otimes \chi_{\cdot A'})$ eine additive Mengenfunktion λ_f auf $\mathcal{X}'$ definiert. Wir setzen Tf als Radon-Nikodym-Ableitung von λ_f bezüglich P' fest (Siehe

Satz 3.4:

Sei T eine Kontraktion von $L_C^1(P)$ in $L_C^1(P')$. Es gelte

$Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$ und $|T|p_j \leq q_j$ für alle $j \in I$.

Dann folgt $\int_\Omega h(x,p)dP \geq \int_\Omega, h(y,q)dP'$ für alle $h \in H_C^+$.

Beweis:

(1) Für jedes $f \in L_C^1(P)$ gilt $|Tf| \leq |T\|f|$,
insbesondere also $|\Sigma a_k y_k| \leq |T\|\Sigma a_k x_k|$
für jede Familie $\{a_k : k \in K\}$ mit $a_k \in C$, $a_k = 0$ bis auf endlich viele.

(2) $|T|\Sigma b_j P_j \leq \Sigma b_j q_j$ für jede Familie
$\{b_j : j \in I\}$ mit $b_j \geq 0$, $b_j = 0$ bis auf endlich viele.

(3) Wenn $f_1, \ldots, f_n$ reellwertige Elemente aus $L_C^1(P)$, dann
$\max_i |T|f_i \leq |T|(\max_i f_i)$,
insbesondere also $\max_i |T|(|\Sigma_k a_{ik}x_k| - \Sigma_j b_{ij}p_j) \leq$
$\leq |T|\max_i(|\Sigma_k a_{ik}x_k| - \Sigma_j b_{ij}p_j)$ für jede Familie
$\{(a_{ik}, b_{ij}) : i \in N, k \in K, j \in I\}$ mit $a_{ik} \in C$, $b_{ij} \geq 0$,
$a_{ik} = 0$, $b_{ij} = 0$ bis auf endlich viele.

(4) Sei $\{(a_{ik}, b_{ij})\}$ eine solche Familie, h die wie in
Definition 3.1 zugeordnete Funktion aus H_C. Dann gilt

$\int_\Omega h^+(x,p)dP \geq \int_\Omega, |T|h^+(x,p)dP'$ ($|T|$positive Kontr.)

$= \int |T|\max_i(|\Sigma_k a_{ik}x_k| - \Sigma_j b_{ij}p_j)^+$ (Def. von h)

$\geq \int \max_i(|T\|\Sigma_k a_{ik}x_k| - |T|\Sigma_j b_{ij}p_j)^+$ (nach (3))

$$\geq \int \max_i \left(\left| \sum_k a_{ik} y_k \right| - \sum_j b_{ij} q_j \right)^+ \qquad \text{((1) und (2))}$$

$$= \int_{\Omega'} h^+(y,q)\, dP' . \qquad \text{q.e.d.}$$

Bemerkung 3.5:

(i) $\int_\Omega h(x,p)\, dP \geq \int_{\Omega'} h(y,q)\, dP'$ für alle $h \in H_C^+$

impliziert $\int_{\Omega'} \left| \sum a_k y_k \right| dP' \leq \int_\Omega \left| \sum a_k x_k \right| dP$ für beliebi

$a_1, \ldots, a_n \in C$.

(ii) Sei $K' \subset K$ eine Indexmenge derart, daß $x' = \{x_k : k \in K'$

eine Basis in $[x]$, dem von x erzeugten Vektorraum,

bildet. T' sei eine lineare Abbildung von $[x']$, d

von x' erzeugten Vektorraum, in $L_C^1(P')$ mit $T'x_k = y_k$

alle $k \in K'$. Nach (i) gilt:

Wenn $k \in K \setminus K'$, $k_1, \ldots k_n \in K'$, $a_1, \ldots a_n \in C$

und $x_k = \sum_i a_i x_{k_i}$, dann folgt $y_k = \sum_i a_i y_{k_i}$

Daraus folgt für die (eindeutige) lineare Fortsetz

T von T' auf $[x]$

$$Tx_k = \sum_i a_i T' x_{k_i} = \sum a_i y_{k_i} = y_k .$$

Um eine lineare Abbildung T von $[x]$ in $L_C^1(P')$ mit

$Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$ festzusetzen, genügt es a

eine lineare Abbildung T' von $[x']$ in $L_C^1(P')$ zu

definieren mit $T'x_k = y_k$ für alle $k \in K'$, falls d

Voraussetzung $\int_\Omega h(x,p)dP \geq \int_{\Omega'} h(y,q)dP'$ für alle $h \in H_C^+$ erfüllt ist.

Voraussetzung:

Wir setzen für den Rest des Kapitels voraus, daß die $\{x_k : k \in K\}$ linear unabhängig sind.

Definition 3.6:

$S_{\Omega'}$ bezeichne die Menge der (P'-Äquivalenzklassen von) Zufallsvariablen auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ mit endlich vielen Werten.
U sei der Vektorraum $L_C^1 \otimes_C S_{\Omega'}$.
V sei der Unterraum der Elemente $v \in U$, die eine Darstellung $v = \Sigma f_i \otimes g_i$ haben, in der f_i für jedes i eine Linearkombination endlich vieler x_k ist.

(i) Sei $u \in U$, $\Sigma f_i \otimes \chi_{A_j'}$ eine Normaldarstellung von u (siehe A 3); dann setzen wir $\kappa(u) := \int_\Omega \max_i |f_i| dP$.

(ii) Sei $u \in U$, $\Sigma f_i \otimes \chi_{A_i'}$ eine Normaldarstellung von u und $j \in I$; falls $\max_i \|\frac{f_i}{p_j}\|_\infty < \infty$ dann setzen wir $\pi_j(u) := \sum_i \int_{A_i'} \|\frac{f_i}{p_j}\|_\infty q_j dP'$, wo $\| \ \|_\infty$ das wesentliche Supremum bedeutet und die Konventionen $\frac{r}{0} = \infty$ für $r \neq 0$ und $\frac{0}{0} = 0$ gelten. Sonst setzen wir $\pi_j(u) = \infty$.

(iii) Sei $v \in V$, $\sum_{i,k} a_{ik} x_k \otimes \chi_{A_i'}$ eine Normaldarstellung von $v \in V$; dann setzen wir $\lambda(v) := \sum_{i,k} \int_{A_i'} a_{ik} y_k dP'$.

Satz 3.7:

Seien U, V, κ, λ, π_j wie oben definiert, μ ein lineares Funktional auf U.

(i) Für jedes $f \in L_C^1(P)$ wird durch $\mu_f(A') := \mu(f \otimes \chi_{A'})$ eine additive Mengenfunktion μ_f auf $\mathcal{A}'$ definiert.

(ii) Für jedes $f \in L_C^1(P)$ sei Tf die Radon-Nikodym-Ableitung von μ_f bez. P' (Siehe A 2).
Dann gilt

(a) $T(f+g) = Tf + Tg$ für alle $f,g \in L_C^1(P)$

(b) $T(af) = aTf$ für alle $f \in L_C^1(P)$ und alle $a \in C$.

(iii) Seien μ, T wie in (ii). Wenn $Re\mu \leq \kappa$, dann gilt $\int_{\Omega'} |Tf| dP' \leq \int_{\Omega} |f| dP$ für alle $f \in L_C^1(P)$.

(iv) Seien μ,T wie in (ii). Wenn $Re\mu \leq \kappa$, dann gilt $|T|p_j \leq q_j$ für alle $j \in I$.

(v) Wenn $\mu(v) = \lambda(v)$ für alle $v \in V$, dann gilt $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$.

Beweis:

(i) Seien $A',B' \in \mathcal{A}'$, $A' \cap B' = \emptyset$, $f \in L_C^1(P)$. Dann gi

$$\mu_f(A' \cup B') = \mu(f \otimes \chi_{A'} + \chi_{B'}) = \mu(f \otimes \chi_{A'}) + \mu(f \otimes \chi_{B'}) =$$

$$= \mu_f(A') + \mu_f(B').$$

(ii) (a) Seien $f,g \in L_C^1(P)$. Unter Benutzung von (A 2) folgt

$$T(f+g)=\frac{d\mu_{f+g}}{dP'} = \frac{d\mu_f}{dP'} + \frac{d\mu_g}{dP'} = Tf + Tg$$

(b) Wir nutzen aus, daß μ_f von einem linearen Funktional μ auf U herrührt. Für jedes $f \in L_C^1(P)$ sei $\rho_f = Re\mu_f, \nu_f = Im\mu_f$.

(1) Für ein komplexwertiges lineares Funktional λ auf einem Vektorraum U gilt bekanntlich $Im\lambda(u)=Re\lambda(-iu)$ für alle $u \in U$. Für unsere obigen μ_f folgt dann

$$\rho_{if} = -\nu_f \text{ und } \nu_{if} = \rho_f.$$

(2) Wenn $a \in R$, dann gilt $\rho_{af} = a\rho_f$, ebenso

$$\nu_{af} = a\nu_f.$$

Wenn $a \in C$, $a = x + iy$, $x = Rea$, $y = Im\, a$, $f \in L_C^1(P)$, dann folgt aus (1), daß

$$\frac{d\rho_{af}}{dP'} = \frac{d\rho_{xf}}{dP'} + \frac{d\rho_{y(if)}}{dP'} = x\frac{d\rho_f}{dP'} - y\frac{d\nu_f}{dP'},$$

$$i\frac{d\nu_{af}}{dP'} = i\frac{d\nu_{xf}}{dP'} + i\frac{d\nu_{y(if)}}{dP'} = ix\frac{d\nu_f}{dP'} + iy\frac{d\mu_f}{dP'}.$$

Durch Addition erhalten wir

$$\frac{d\mu_{af}}{dP'} = \frac{d\rho_f}{dP'}(x+iy)+i\frac{d\nu_f}{dP'}(x+iy) = a\frac{d\mu_f}{dP'}.$$

(3) Aus (1) und (2) folgt für alle $a \in C$ und alle $f \in L_C^1(P)$

$$T(af) = \frac{d\mu_{af}}{dP'} = a\frac{d\mu_f}{dP'} = aTf.$$

(iii) Sei $f \in L^1(P), \varepsilon > 0$. Dann gibt es offenbar $a_1,\dots,a_n \in C$ mit $|a_i| = 1$ und eine endliche $\mathcal{A}'$-Zerlegung $A_1',\dots,A_n'$ von Ω', so daß $\int_{\Omega'}|Tf|dP' \leq \mathrm{Re}\ \Sigma \int_{A_i'} T(a_i f)dP' + \varepsilon$. Andererseits gi

$\mathrm{Re}\Sigma\int_{A_i'}T(a_i f)dP' = \mathrm{Re}\lambda(\Sigma a_i f\otimes \chi_{A_i'}) \leq \pi(\Sigma a_i f\otimes \chi_{A_i'})=\int_\Omega |f$

Daraus ergibt sich $\int_{\Omega'}|Tf|dP' \leq \int_\Omega |f|dP$.

(iv) Nach Definition ist $|T|p_j = \sup\{\mathrm{Re}T(ap_j):a\in C,|a|=1\}$.

Zu jedem $A' \in \mathcal{A}'$ und $\varepsilon > 0$ existieren daher $a_1,\dots,a_n \in C$ mit $|a_i|=1$ und eine $\mathcal{A}'$-Zerlegung $A_1',\dots,A_n'$ von A', so daß $\int_{A'}|T|p_j\,dP' \leq$

$\leq \mathrm{Re}\Sigma\int_{A_i'}T(a_i p_j)dP'+\varepsilon$. Andererseits gilt

$\mathrm{Re}\Sigma\int_{A_i'}T(a_i p_j)=\mathrm{Re}\lambda(\Sigma a_i p_j\otimes \chi_{A_i'})\leq\pi_j(\Sigma a_i p_j\otimes \chi_{A_i'}) =$

$= \Sigma\int_{A_i'}\|\frac{a_i p_j}{p_j}\|_\infty q_j dP' \leq \int_{A'}q_j dP'$, also $|T|p_j \leq q_j$

(v) Für jedes $A' \in \mathcal{A}'$ gilt nach Definition von λ $\lambda(x_k\otimes \chi_{A'}) = \int_{A'}y_k dP'$. Das bedeutet, daß λ_{x_k} σ-addit und P'-absolutstetig ist. Daher gilt

$\int_{A'}y_k dP' = \lambda(x_k\otimes \chi_{A'}) = \int_{A'}Tx_k dP'$, also $y_k = Tx_k$

q.e.d.

Satz 3.8

Es gelte $\int_\Omega h(x,p)dP \geq \int_{\Omega'}h(y,q)dP'$ für alle $h \in H_C^+$.

Dann gibt es eine Kontraktion T von $L_C^1(P)$ in $L_C^1(P')$ mit $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$ und $|T|p_j \leq q_j$ für alle $j \in I$.

Der Beweis dieses Satzes ist erbracht, wenn die im folgenden Satz zusammengefaßten Aussagen bewiesen sind.

Satz 3.9 :

(i) κ ist eine (endliche)Halbnorm.

(ii) Für jedes $j \in I$ ist π_j sublinear.

(iii) λ ist linear auf V.

(iv) Sei $I' \subset I$ eine endliche Indexmenge, $u \in U$, $u_j \in U$ für $j \in I'$, $v \in V$ und $u + \sum_{I'} u_j = v$. Wenn

$$\int_\Omega h(x,p) \geq \int_\Omega h(y,q) \text{ für alle } h \in H_C^+, \text{ dann gilt}$$

$$\mathrm{Re}\lambda(v) \leq \kappa(u) + \sum_{I'} \pi_j(u_j).$$

Dann folgt nämlich aus der Sandwich-Version(A4) des Satzes von Hahn-Banach, daß λ von V so linear auf U fortgesetzt werden kann, daß der Realteil der Fortsetzung unter κ und für jedes $j \in I$ unter π_j liegt.

Beweis von 3.9 :

Wir beweisen nur die einzige nichttriviale Behauptung, nämlich (iv): Seien I', u, $\{u_j : j \in I'\}$, v wie in der

Voraussetzung gegeben, und zwar alle in einer Normaldarstellung mit denselben "Stufen" A_i', d. h.

$u = \Sigma f_i \otimes \chi_{A_i}$, $u_j = \Sigma f_{ij} \otimes \chi_{A_i'}$, $v = \Sigma g_i \otimes \chi_{A_i'}$ mit $g_i = \Sigma a_{ik} x$

(1) Für jedes $i \in N$ gilt $g_i = \sum_{I'} f_{ij} + f_i$ und folglich

$$|g_i| - \sum_{I'} |f_{ij}| \leq |f_i|.$$

(2) Wenn $\max_{i,j} \|\frac{f_{ij}}{p_j}\|_\infty = \infty$, dann ist nichts zu zeigen, weil

dann $\pi_j(u_j) = \infty$ für ein $j \in I'$.

Wenn $\max_{i,j} \|\frac{f_{ij}}{p_j}\|_\infty < \infty$, dann liegt für alle $i \in N$ der

Träger von f_{ij} im Träger von p_j für jedes $j \in I'$.

In diesem Falle gilt offenbar $\|\frac{f_{ij}}{p_j}\|_\infty p_j \geq |f_{ij}|$.

(3) Sei nun $\max_{i,j} \|\frac{f_{ij}}{p_j}\|_\infty < \infty$. Dann gilt

$$\mathrm{Re}\lambda(v) - \sum_{I'} \pi_j(u_j) =$$

$$= \mathrm{Re} \sum_i \int_{A_i'} (\Sigma a_{ik} y_k - \sum_{I'} \|\frac{f_{ij}}{p_j}\|_\infty q_j) dP'$$

$$\leq \int_\Omega \max_i (|\Sigma a_{ik} y_k| - \sum_{I'} \|\frac{f_{ij}}{p_j}\|_\infty q_j)^+ dP'$$

$$\leq \int_\Omega \max_i (|g_i| - \sum_{I'} \|\frac{f_{ij}}{p_j}\|_\infty p_j)^+ dP \qquad \text{(nach Vor.)}$$

$$\leq \int_\Omega \max_i (|g_i| - \sum_{I'} |f_{ij}|)^+ dP \qquad \text{(wegen (2))}$$

$$\leq \int_\Omega \max_i |f_i| dP = \kappa(u). \qquad \text{(wegen (1))}$$

q.e.d.

4. DURCH DIE FUNKTIONALE $D_\cdot^1, D_\cdot^\infty, D_\cdot$ CHARAKTERISIERBARE KONTRAKTIONEN

Im gesamten Kapitel 4. seien

$(B, \|\ \|)$ ein komplexer reflexiver Banachraum,

$(B', \|\ \|)$ sein topologischer Dualraum,

$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ σ-endliche Maßräume, P, P' positiv,

$E = L_B^1(\Omega, \mathfrak{A}, P) \cap L_B^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, P)$,

$F = L_B^1(\Omega', \mathfrak{A}', P') \cap L_B^\infty(\Omega', \mathfrak{A}', P')$,

$G = L_{B'}^1(\Omega', \mathfrak{A}', P') \cap L_{B'}^\infty(\Omega', \mathfrak{A}', P')$, (für Bezeichnungen siehe |11|)

p_1 die Norm $e \longmapsto \int_\Omega \|e\| dP$ auf E,

p_∞ die Norm $e \longmapsto \inf\{\lambda > 0 : P[\|e\| > \lambda] = 0\}$ auf E,

q_1, q_∞ die entsprechenden Normen auf F,

r_1, r_∞ die entsprechenden Normen auf G,

K eine beliebige Indexmenge,

$x = \{x_k : k \in K\}$ eine Familie von Elementen aus E,

$y = \{x_k : k \in K\}$ eine Familie von Elementen aus F.

Wir geben charakteristische Ungleichungen für die Existenz einer starken Kontraktion (d.h. $\|T\|_1 \leq 1$ und $\|T\|_\infty \leq 1$) von E in F an, die die x_k in die y_k überführt. Die Ungleichungen sind von anderem Typ als die in den vorigen Kapiteln zum Nachweis der Existenz von Kontraktionen benutzten.

Wir werden nämlich auf den Familien $\{f_k' : k \in K\}$ von Elementen

aus G, die bis auf endlich viele verschwinden, Funktiona

D_x^1, D_x^∞, D_x sowie D_y^1, D_y^∞, D_y einführen und mit deren Hilf

folgenden Satz beweisen:

Genau dann existiert eine starke Kontraktion T von E in

die die x_k in die y_k überführt, wenn $D_x^1 \geq D_y^1$, $D_x^\infty \geq D_y^\infty$, D_x

Die "Konstruktion" von T verwendet den Satz von Hahn-Bana

auf dem Vektorraum $U = E \otimes_C G$ und dem Unterraum V der

Elemente aus U, die eine Darstellung $\Sigma x_k \otimes f_k'$ mit $f_k' \in G$

haben. Wir werden ein lineares Funktional λ auf U finden,

dessen Betrag unter einer Norm κ liegt. Aus λ gewinnen

wir eine Familie $\{\lambda_f : f \in E\}$ von B-wertigen additiven Menge

funktionen auf $\mathcal{A}'$, indem wir für jedes Tripel

$(f,b',A') \in E \times B' \times \mathcal{A}$ setzen $\langle \lambda_f(A'), b' \rangle = \lambda(f \otimes b' \chi_{A'})$. Sei

für jedes $f \in E$ Tf die schwache Radon-Nikodym-Ableitung

von λ_f (Siehe A 2). Wir werden zeigen, daß T ei

lineare Abbildung E in F definiert mit $\int_{A'} \langle Tf, b' \rangle \, dP' =$

$= \lambda(f \otimes b' \chi_{A'})$ für alle $(b',A') \in B' \times \mathcal{A}'$, und daß es möglic

ist, λ auf V so festzusetzen, daß T eine starke Kontrakt

wird mit $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$.

Bemerkung 4.1:

Unter einer B-wertigen additiven Mengenfunktion auf $\mathcal{A}'$

verstehen wir eine Mengenfunktion μ auf $\mathcal{A}'$ mit Werten in

B derart, daß für jedes $b' \in B'$ $\langle \mu(.),b' \rangle$ eine (gewöhnliche komplexwertige) additive Mengenfunktion auf $\mathcal{A}'$ ist.

Definition 4.2 |16|:

Seien (F,q),(G,r) normierte Vektorräume über C mit den Normen q,r. Durch

$$q \otimes r(\Sigma f_k \otimes g_k) := \inf\{\Sigma q(f_k')r(g_k') : \Sigma f_k' \otimes g_k' = \Sigma f_k \otimes g_k\}$$

wird auf $F \otimes_C G$ eine Norm $q \otimes r$ definiert. Sie heißt Tensorprodukt der Normen q und r.

Bemerkung 4.3:

$q \otimes r$ ist eine "cross-norm", d.h. für jedes Element $f \otimes g \in F \otimes G$ vom Rang 1 gilt $q \otimes r(f \otimes g) = q(f).r(g)$ (siehe |16|).

Definition 4.4:

Auf den Familien $\{f_k' : k \in K\}$ von Elementen aus G, die bis auf endlich viele verschwinden, definieren wir

$$D_x^1(\{f_k'\}) = p_1 \otimes r_\infty(\Sigma x_k \otimes f_k'),$$

$$D_y^1(\{f_k'\}) = q_1 \otimes r_\infty(\Sigma y_k \otimes f_k'),$$

$$D_x^\infty(\{f_k'\}) = p_\infty \otimes r_1(\Sigma x_k \otimes f_k'),$$

$$D_y^\infty(\{f_k'\}) = q_\infty \otimes r_1(\Sigma y_k \otimes f_k'),$$

$D_x(\{f'_k\}) = \inf\{p_1 \otimes r_\infty(u_1) + p_\infty \otimes r_1(u_\infty) : u_1, u_\infty \in E \otimes G, u_1 + u_\infty = \Sigma x_k \otimes f'_k$

$D_y(\{f'_k\}) = \inf\{q_1 \otimes r_\infty(w_1) + q_\infty \otimes r_1(w_\infty) : w_1, w_\infty \in F \otimes G, w_1 + w_\infty = \Sigma y_k \otimes f'_k$

Das Argument $\{f'_k\}$ ersetzen wir in Zukunft durch f'_k,

also z.B $D_x(\{f'_k\}) = D_x(f'_k)$.

Wir nennen D_x größer als D_y, wenn $D_x(f'_k) \geq D_y(f'_k)$ für all

wie oben definierten Familien $\{f'_k\}$, und schreiben $D_x \geq D_y$

Entsprechendes gilt für D_x^1, D_y^1 und D_x^∞, D_y^∞.

Satz 4.5:

Sei T eine lineare Abbildung von E in F mit $Tx_k = y_k$

für alle $k \in K$.

(i) Wenn $\|T\|_1 \leq 1$, dann $D_x^1 \geq D_y^1$.

(ii) Wenn $\|T\|_\infty \leq 1$, dann $D_x^\infty \geq D_y^\infty$.

(iii) Wenn $\|T\|_1 \leq 1$ und $\|T\|_\infty \leq 1$,

dann $D_x^1 \geq D_y^1$ und $D_x^\infty \geq D_y^\infty$ und $D_x \geq D_y$.

Beweis:

Wir bemerken zunächst folgendes:

Wenn $u_1 = \Sigma g_k \otimes g'_k$, $u_\infty = \Sigma h_k \otimes h'_k \in E \otimes G$ und

$$u_1 + u_\infty = \Sigma x_k \otimes f'_k ,$$

dann gilt mit den Bezeichnungen

$$w_1 = \Sigma Tg_k \otimes g_k', \quad w_\infty = \Sigma Th_k \otimes h_k' \in F \otimes G$$

$$w_1 + w_\infty = \Sigma y_k \otimes f_k'.$$

Für jede Bilinearform β' auf $F \times G$ wird nämlich durch $\beta: (f,f') \mapsto \beta'(Tf,f')$ eine Bilinearform β auf $E \times G$ definiert. Daher gilt

$$\Sigma\beta'(Tg_k,g_k') + \Sigma\beta'(Th_k,h_k') = \Sigma\beta(g_k,g_k') + \Sigma\beta(h_k,h_k') =$$

$$= \Sigma\beta(x_k,f_k') = \Sigma\beta'(Tx_k,f_k') = \Sigma\beta'(y_k,f_k').$$

Da dies für alle Bilinearformen β' auf $F \times G$ gilt, so folgt $\Sigma Tg_k \otimes g_k' + \Sigma Th_k \otimes h_k' = \Sigma y_k \otimes f_k'$.

(i): Sei $\Sigma g_k \otimes g_k'$ eine beliebige Darstellung von $\Sigma x_k \otimes f_k'$. Dann ist nach obiger Bemerkung $\Sigma Tg_k \otimes g_k'$ eine Darstellung von $\Sigma y_k \otimes f_k'$.

$\|T\|_1 \leq 1$ bedeutet, daß $p_1(f) \geq q_1(Tf)$ für alle $f \in E$. Deshalb folgt

$$\Sigma p_1(g_k) r_\infty(g_k') \geq \Sigma q_1(Tg_k) r_\infty(g_k') \geq D_y^1(f_k').$$

Bildet man das Infimum der linken Seite über alle Darstellungen $\Sigma g_k \otimes g_k'$ von $\Sigma x_k \otimes f_k'$, so erhält man $D_x^1 \geq D_y^1$.

(ii): Wird analog wie (i) bewiesen.

(iii): Seien $u_1 = \Sigma g_k \otimes g_k'$, $u_\infty = \Sigma h_k \otimes h_k' \in E \otimes G$ und $u_1 + u_\infty = \Sigma x_k \otimes f_k'$.

$\|T\|_1 \leq 1$ bedeutet $p_1(f) \geq q_1(Tf)$ für alle $f \in E$,

$\|T\|_\infty \leq 1$ bedeutet $p_\infty(f) \geq q_\infty(Tf)$ für alle $f \in E$.

Deshalb folgt

$$\Sigma p_1(g_k) r_\infty(g_k') + \Sigma p_\infty(h_k) r_1(h_k') \geq$$

$$\geq \Sigma q_1(Tg_k) r_\infty(g_k') + \Sigma q_\infty(Th_k) r_1(h_k') \geq$$

$$\geq D_y(f_k'),$$

denn nach der (i) vorangehenden Bemerkung gilt mit

Bezeichnungen

$$w_1 := \Sigma Tg_k \otimes g_k', \quad w_\infty := \Sigma Th_k \otimes h_k' \in F \otimes G$$

$$w_1 + w_\infty = \Sigma y_k \otimes f_k'.$$

Bildet man das Infimum der linken Seite über alle

$u_1, u_\infty \in E \otimes G$ mit $u_1 + u_\infty = \Sigma x_k \otimes f_k'$, so erhält ma

$$D_x \geq D_y.$$

q. e. d.

Zur Umkehrung des Satzes benötigen wir einige vorbereitend

Feststellungen:

(i) Sei $K' \subset K$ derart, daß $x' := \{x_k : k \in K'\}$ ein maximales linear unabhängiges System ist im Vektorraum, der vo $\{x_k : k \in K\}$ erzeugt wird. Dann sind in $\sum_{k \in K'} x_k \otimes f_k' \in E$

die f_k' 1-dtg. bestimmt (siehe |13|, Seite 80)

(ii) Seien K',x' wie in (i), T sei eine Abb., die den vor x erzeugten Vektorraum linear in F abbildet. Dann is T als lineare Abbildung auf dem von x erzeugten Vekt raum eindeutig festgelegt durch seine Restriktion au die Elemente von x'.

(iii) Wenn $D_x^1 \geq D_y^1$ und $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K'$,

dann $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$.

Sind nämlich $k_1,\ldots,k_n \in K', k_o \in K \setminus K', a_{k_1},\ldots,a_{k_n} \in C$

und $x_{k_o} = -\sum_{i=1}^{n} a_{k_i} x_{k_i}$, so gilt mit $a_{k_o} = 1$ für beliebiges

$f' \in G$

$$D_y^1(a_{k_i} f') = q_1(\sum_{o}^{n} a_{k_i} y_{k_i}) r_\infty(f') \leq$$

$$\leq D_x^1(a_{k_i} f') = p_1(\sum_{o}^{n} a_{k_i} x_{k_i}) r_\infty(f') = 0$$

Daraus folgt $y_{k_o} = \sum_{1}^{n} a_{k_i} y_{k_i} = \sum_{1}^{n} a_{k_i} Tx_{k_i} = Tx_{k_o}$.

(iv) Analog zu (iii) sieht man: Wenn $D_x^\infty \geq D_y^\infty$ und

$Tx_k = y_k$ für alle $k \in K'$, dann $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$.

Die vorangehenden Feststellungen zeigen folgendes: Um eine lineare Abbildung T von E in F mit $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$ zu definieren, genügt es, eine lineare Abbildung T' von E in F mit $T'x_k = y_k$ für alle $k \in K'$ zu definieren, falls die Voraussetzung $D_x^1 \geq D_y^1$ bzw. die Voraussetzung $D_x^\infty \geq D_y^\infty$ erfüllt ist.

<u>Voraussetzung:</u>

Für den Rest der Arbeit setzen wir voraus, daß die $\{x_k : k \in K\}$ l.u. sind.

Feststellung (i) ermöglicht dann folgende Definition.

Definition 4.6:

Sei $U = E \otimes_C G$, V der Unterraum von U der Elemente, die eine Darstellung $\Sigma x_k \otimes f'_k$ haben. Für $v = \Sigma x_k \otimes f'_k \in V$ setzen wir

$$\lambda(v) = \Sigma \int_{\Omega'} \langle y_k, f'_k \rangle \, dP.$$

Für $u \in U$ setzen wir

$$\kappa(u) = \inf\{p_1 \otimes r_\infty(u_1) + p_\infty \otimes r_1(u_\infty) : u_1, u_\infty \in U, u_1 + u_\infty = u\}.$$

Bemerkung 4.7:

Es ist bekannt (z.B. |4|), daß κ die größte Norm auf U unter den Normen $p_1 \otimes r_\infty$ und $p_\infty \otimes r_1$ ist.

Satz 4.8:

Seien U, V, κ, λ wie oben, μ ein lineares Funktional auf mit $|\mu| \leq \kappa$.

(i) Sei $f \in E$. Dann gibt es eine B-wertige additive Mengenfunktion μ_f auf $\mathcal{A}'$ mit $\langle \mu_f(A'), b' \rangle = \mu(f \otimes b' \chi$ für alle $(b', A') \in B' \times \mathcal{A}'$.

(ii) Sei für jedes $f \in E$ Tf die schwache Radon-Nikodym Derivierte von $\mu_f(.)$ bezüglich P'. Es gibt eine lineare Abbildung T von E in F mit $\int_{A'} \langle Tf, b' \rangle \, dP'$ $= \lambda(f \otimes b' \chi_{A'})$ für alle $(b', A') \in B' \times \mathcal{A}'$.

(iii) Wenn $\mu = \lambda$ auf V, dann gilt für jede wie in (ii) konstruierte Abbildung T für alle $k \in K$ $Tx_k = y_k$.

(iv) Für jedes wie in (ii) zu μ konstruierte T gilt $\|T\|_1 \leq 1$ und $\|T\|_\infty \leq 1$.

Beweis:

(i) Für jedes $(f,A') \in E \times \mathcal{U}'$ wird durch $b' \longmapsto \mu(f \otimes b' \chi_{A'})$ ein lineares Funktional auf B' definiert. Wenn $|\mu| \leq \kappa$, dann ist dieses Funktional stetig, d.h. ein Element $\mu_f(A') \in B'' = B$, und es gilt für alle $b' \in B'$ $\langle \mu_f(A'), b' \rangle = \mu(f \otimes b' \chi_{A'})$.

(ii) Wenn $|\mu| \leq \kappa$, dann gibt es zu jedem $f \in E$ eine Konstante $K_f \geq 0$ mit $\|\mu_f(A')\| \leq K_f \cdot P(A')$ für alle $A' \in \mathcal{U}'$, nämlich $K_f = \|f\|_\infty$.
Darum existiert nach A2 (iii) ein Element $Tf \in L_B^\infty(P')$ mit $\int_{A'} \langle Tf, b' \rangle \, dP' = \mu(f \otimes b' \chi_{A'})$ für alle $b' \in B'$ und alle $A' \in \mathcal{U}'$ mit $P'(A') < \infty$.
Es gilt auch $Tf \in L_B^1(P')$. Wir zeigen sogar, daß $|\mu| \leq \kappa \quad \|Tf\|_1 \leq \|f\|_1$ impliziert.
Seien nämlich $H = \{b_i : i \in N\}$ eine Folge von Elementen aus B und A' eine Menge aus $\mathcal{U}'$ mit $P'(\Omega' \setminus A') = 0$ derart, daß $Tf(\omega') \in \bar{H}$ für alle $\omega' \in A'$, wobei $\bar{H}$ den Abschluß von H in B bedeutet. Ein solches Paar H,A' existiert nach Satz in |11|.

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir eine Zerlegung $\{A_i'\}$ von A' in abzählbar viele, paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{A}$ sowie eine Folge $\{b_i' : i \in N\}$ von Elementen aus B' mit $\|b_i'\| \leq 1$, so daß gilt:

(i) $0 < P'(A_i') =: r_i < \infty$

(ii) $\|b_i\| \leq \mathrm{Re}\langle b_i, b_i' \rangle + \frac{\varepsilon}{r_i \cdot 2^i} \varepsilon =: \varepsilon_i$ für alle $i \in$

(iii) $\|Tf - b_i\| \leq \frac{\varepsilon}{r_i \cdot 2^i} =: \varepsilon_i$ auf A_i' für alle $i \in N$.

Diese Wahl ist möglich, weil P' σ-endlich ist und f beliebiges $b \in B$ gilt $\|b\| = \sup\{|\langle b, b' \rangle| : b' \in B', \|b$ (siehe Seite 72 in |11|).

Es folgt, daß

$$\|Tf\| \leq \|Tf - b_i\| + \|b_i\| \leq 2\varepsilon_i + \mathrm{Re}\langle b_i, b_i' \rangle \leq 3\varepsilon_i + \mathrm{Re}\langle Tf, b \text{ auf } A_i'$$

und daher für jedes $n \in N$

$$\sum_{i \leq n} \int_{A_i'} \|Tf\| - 3\varepsilon \leq \mathrm{Re} \sum_{i \leq n} \int_{A_i'} \langle Tf, b_i' \rangle \leq \kappa(f \otimes \sum_{i \leq n} b_i' \chi_{A_i'}) \leq$$

$$\leq \|f\|_1 \| \sum_{i \leq n} b_i \chi_{A_i'} \|_\infty \leq \|f\|_1,$$

folglich

$$\|Tf\|_1 = \sup_n \sum_{i \leq n} \int_{A_i'} \|Tf\| \leq \|f\|_1.$$

(iii) Sei $(b', A') \in B' \times \mathcal{A}'$. Dann gilt

$$\lambda(x_k \otimes b' \chi_{A'}) = \int_{\Omega'} \langle y_k, b' \chi_{A'} \rangle \, dP' = \int_{A'} \langle y_k, b' \rangle =$$

$$= \int_{A'} \langle Tx_k, b' \rangle .$$

Das letzte "=" gilt, weil das Maß $\int_{\cdot} \langle y_k, b' \rangle$ auf $\mathcal{A}$ offensichtlich sowohl σ-additiv als auch P'-absolut stetig ist.

Daher gilt $\langle Tx_k, b' \rangle = \langle y_k, b' \rangle$ für alle $b' \in B'$ und somit $Tx_k = y_k$.

(iv) (a) Sei $f \in E$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche $\mathcal{U}'$-Zerlegung $\{A'_k\}$ von Ω' und endlich viele $b'_k \in B'$ mit $\|b'_k\| = 1$, so daß gilt

$$\int_{\Omega'} \|Tf\| dP' - \varepsilon \leq \left| \Sigma \int_{A'_k} \langle Tf, b'_k \rangle \, dP' \right| =$$

$$= \left| \lambda(f \otimes \Sigma b'_k \chi_{A'_k}) \right| \leq \kappa(f \otimes \Sigma b'_k \chi_{A'_k}) \leq$$

$$\leq p_1(f) \cdot r_\infty(\Sigma b'_k \chi_{A'_k}) \leq \int_\Omega \|f\| dP,$$

also $\|T\|_1 \leq 1$.

(b) Sei $f \in E$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $A' \in \mathcal{U}'$ gibt es eine endliche $\mathcal{U}'$-Zerlegung $\{A'_k\}$ von A' und endlich viele $b'_k \in B'$ mit $\|b'_k\| = 1$, so daß wie oben gilt

$\int_{A'} \|Tf\| dP' \leq p_\infty(f) r_1(\Sigma b'_k \chi_{A'_k}) + \varepsilon$. Es folgt

$\int_{A'} \|Tf\| dP' \leq \int_{A'} p_\infty(f) \, dP'$, d.h.

$\|Tf\| \leq p_\infty(f)$,

also $\|T\|_\infty \leq 1$.

Satz 4.9:

(i) Wenn $D^1_X \geq D^1_Y$, dann gibt es eine lineare Abbildung T von E in $L^1_B(P')$ mit $\|T\|_1 \leq 1$ und $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$.

(ii) Wenn $D_x^\infty \geq D_y^\infty$, dann gibt es eine lineare Abbildung T von E in $L_B^\infty(P')$ mit $\|T\|_\infty \leq 1$ und $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$.

(iii) Wenn $D_x^1 \geq D_y^1$ und $D_x \geq D_y$, dann gibt es eine linear Abbildung T von E in F mit $\|T\|_1 \leq 1$, $\|T\|_\infty \leq 1$ und $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$.

(iii') Wenn $D_x \geq D_y^\infty$ und $D_x^\infty \geq D_y$, dann gibt es eine linear Abbildung T von E in F mit $\|T\|_1 \leq 1$, $\|T\|_\infty \leq 1$ und $Tx_k = y_k$ für alle $k \in K$.

Wir werden nur (iii) beweisen. Die Modifikationen für den Beweis der anderen Aussagen sind offensichtlich.

Wir wissen schon, daß

λ linear auf V,

κ eine Norm auf U.

Zum Beweis von (iii) bleibt nur noch der folgende Satz zu beweisen.

Satz 4.10:

Sei $D_x^1 \geq D_y^1$ und $D_x \geq D_y$, λ, κ wie oben.

Dann gilt $|\lambda(v)| \leq \kappa(v)$ für alle $v \in V$.

Beweis:

Sei $v = \Sigma x_k \otimes f_k' \in V$.

Für jedes Paar $w_1 = \Sigma g_k \otimes g_k'$, $w_\infty = \Sigma h_k \otimes h_k' \in F \otimes G$

mit $w_1 + w_\infty = \Sigma y_k \otimes f_k'$ gilt $\Sigma \langle y_k, f_k' \rangle = \Sigma \langle g_k, g_k' \rangle + \Sigma \langle h_k, h_k' \rangle$

und folglich unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung

$$|\lambda(v)| = |\int_{\Omega'} (\Sigma \langle g_k, g_k' \rangle + \Sigma \langle h_k, h_k' \rangle) dP'| \leq$$

$$\leq \|\Sigma \|g_k\| \|g_k'\|\|_1 + \|\Sigma \|h_k\| \|h_k'\|\|_1 \leq$$

$$\leq \Sigma q_1(g_k) r_\infty(g_k') + \Sigma q_\infty(h_k) r_1(h_k'),$$

also $|\lambda(v)| \leq D_y(f_k') \leq D_x(f_k') = \kappa(v)$.

q.e.d.

Anhang

A1. Definition: (i) Ein Maß P auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ von Untermengen einer Menge Ω ist eine additive Abbildung von $\mathcal{A}$ in $[-\infty, +\infty)$ mit $P(\emptyset) = 0$.

(ii) P heißt positiv, wenn $P(A) \geq 0$ für $A \in \mathcal{A}$.

(iii) P heißt beschränkt, wenn $P(\Omega) > -\infty$

A2. (a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein σ-endlicher Maßraum mit positive μ eine endlich-additive Mengenfunktion auf $\mathcal{A}$ mi Werten in $(-\infty, +\infty)$. Es ist bekannt, daß durch

$\bar{\mu}(A) := \inf \{\Sigma \mu(A_i) : \{A_i\}$ abzählbare Zerl. von A paarweise disjunkte Mengen $A_i \in \mathcal{A}\}$

das größte Maß unter μ definiert wird ($-\infty$ zugel

Wenn $\bar{\mu}$ beschränkt ist, dann gibt es ein P-f.s. deutiges $\frac{d\mu}{dP} \in L_R^1(P)$ und eine P-Nullmenge N, so

$\bar{\mu}(A) = \int_A (\frac{d\mu}{dP})\, dP + \bar{\mu}(A \cap N)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Wenn $\bar{\mu}$ nicht beschränkt ist, dann setzen wir

$\frac{d\mu}{dP} = -\infty$.

In beiden Fällen nennen wir $\frac{d\mu}{dP}$ die Radon-Nikody Ableitung von μ bezüglich P.

Wenn μ, ν endlich-additive Mengenfunktionen auf mit Werten in $(-\infty, +\infty)$ sind und $r \in R$, dann gil

(i) $\frac{d(\mu+\nu)}{dP} = \frac{d\mu}{dP} + \frac{d\nu}{dP}$ und

(ii) $\frac{d(r\mu)}{dP} = r\frac{d\mu}{dP}$.

(b) Für eine komplexwertige endlich-additve Mengenfunktion μ auf $\mathcal{A}$ setzen wir $\frac{d\mu}{dP} = \frac{d(Re\mu)}{dP} + i\,\frac{d(Im\mu)}{dP}$ und nennen $\frac{d\mu}{dP}$ die Radon-Nikodym-Ableitung von μ bezüglich P.

(c) Für banachraumwertige additive Mengenfunktionen gilt folgende Verallgemeinerung (|12|) des Satzes von Dunford-Pettis (Seite 503 in|6|):
Sei μ eine additive Mengenfunktion auf $\mathcal{A}$ mit Werten im topologischen Dualraum E' eines (komplexen oder reellen) Banachraums E. Es gebe eine Konstante $K > 0$ mit $\|\mu(A)\| \leq K \cdot P(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann gibt es ein P-f.s. eindeutiges $\frac{d\mu}{dP} \in L^{\infty}_{E'}(P)$ mit

$\langle e, \mu(A)\rangle = \int_A \langle e, \frac{d\mu}{dP}\rangle\, dP$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) < \infty$ und alle $e \in E$.
Wir nennen $\frac{d\mu}{dP}$ die <u>schwache Radon-Nikodym-Ableitung</u> von μ bzgl. P.

<u>A3.</u> Sei $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ein Maßraum, E ein reeller (bzw. komplexer) Vektorraum, S_Ω der Raum der (Klassen von) Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathcal{A})$ mit endlich vielen reellen (bzw. komplexen) Werten. Jedes $g \in S_\Omega$ kann als endliche Summe $\Sigma r_i \otimes \chi_{A_i}$, $r_i \in R$ (bzw. $r_i \in C$) und paarweise disjunkten $A_i \in \mathcal{A}$

dargestellt werden. Sei $\Sigma f_k \otimes g_k \in E \otimes_R S_\Omega$ (bzw. $\in E$

$\Sigma_i r_{ik} \otimes \chi_{A_i}$ für jedes k eine Darstellung von g_k. Dann

kann $\Sigma f_k \otimes g_k$ als endliche Summe $\Sigma h_i \otimes \chi_{A_i}$ mit

$h_i = \Sigma_k r_{ik} f_k \in E$ dargestellt werden. Jede Darstellun

eines Elements $u \in E \otimes_R S_\Omega$ (bzw. $\in E \otimes_C S_\Omega$) als endli

Summe $\Sigma h_i \otimes \chi_{A_i}$ mit $h_i \in E$ und paarweise disjunkten

$A_i \in$ heißt <u>eine Normaldarstellung von u</u>.

A4. Die folgende Sandwich-Version des Satzes von Hahn-Ban

wird z. B. in |18| bewiesen:

Seien U ein (komplexer oder reeller) Vektorraum,

V ein Unterraum von U,

I, K Indexmengen,

σ_k für jedes $k \in K$ ein superlineares (reellwerti

Funktional auf U,

κ_j für jedes $j \in I$ ein sublineares (reellwertig

Funktional auf U,

λ ein (komplexwertiges) lineares Funktional auf

Wenigstens eines der κ_j sei endlich.

Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt ein lineares Funktional μ auf U mit

$$\mu(v) = \lambda(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

$$\mathrm{Re}\,\mu(u) \geq \sigma_k(u) \quad \text{für alle } u \in U \text{ und alle } k$$

$$\mathrm{Re}\,\mu(u) \leq \kappa_j(u) \quad \text{für alle } u \in U \text{ und alle } j$$

(ii) Wenn $I' \subset I$, $K' \subset K$, I' und K' endlich,

$$u_k,\ w_j \in U,\ v \in V$$

und $$\sum_{k \in K'} u_k + v = \sum_{j \in I'} w_j,$$

dann $$\sum_{K'} \sigma_k(u_k) + \operatorname{Re}\ \lambda(v) \leq \sum_{I'} \kappa_j(w_j).$$

LITERATUR

|1| Chacon, R.V.: On the ergodic theorem without assumption of positivity, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 181 - 190

|2| Chacon, R.V. und Ornstein, D.S.: A general ergodic theorem, Illinois Journ. Math. 4 (1960), 153 - 160

|3| Cuculescu, I. und Foias, C.: An individual ergodic theorem for positive operators, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 11,5 (1966), 581 - 594

|4| Dinges, H.: Decomposition in ordered semigroups, Journ. of funct. anal. vol. 5, no. 3 (1970), 436 -

|5| Dinges, H.: Ein Überblick über einige neuere Ansät zu den Gesetzen der großen Zahlen, erscheint in Pro of the Fourth Conf. on Prob. Theory, Brasov, Sept.

|6| Dunford, N. und Schwartz, J.T.: Linear Operators I Interscience Publishers, New York (1958)

|7| Engmann, H.: A reformulation of an Ergodic Theorem Papers from the "Open House for Probabilists 71", Various Publ. Series 21, Matematisk Institut, Aarhu Univ. (1972), 86 - 91

|8| Engmann, H. und Rost, H.: Konische Maße, unveröffentlicht

|9| Garsia, A.: Topics in almost everywhere convergenc Markham Publishing Company, Chicago, 1970

|10| Ionescu Tulcea, A. und C.: Abstract ergodic Theorems, TAMS 107 (1963), 107 - 124

|11| Ionescu Tulcea, A. und C.: Topics in the theory of lifting, Springer, New York (1969)

|12| Ionescu Tulcea, A. und C.: On the lifting property I, Journ. Math. Anal. and Appl. 3 (1961), 537 - 547

|13| Köthe, G.: Topologische lineare Räume I, Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960

|14| Krengel, U.: Über den Absolutbetrag stetiger linearer Operatoren und seine Anwendung auf ergodische Zerlegungen, Math. Scand. 13 (1963), 151 - 187

|15| Rost, H.: Charakterisierung einer Ordnung von konischen Maßen durch positive L^1-Kontraktionen, Journ. Math. Anal. and Appl. Vol. 33 (1971), 35 - 42

|16| Schaefer, H.H.: Topological vector spaces, Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1971

|17| Scheller, L.: Fortsetzungen additiver Funktionen auf Halbgruppen zwischen sub- und superadditiven Funktionalen, Dissertation Univ. Frankfurt (1972)

|18| Simons, S.: Extended and sandwich versions of the Hahn-Banach theorem, Journ. of Math. Anal. and Appl., 21 (1968), 112 - 122

Lebenslauf

Ich wurde am 7.Mai 1945 als Sohn des kaufmännischen Angestellten Johannes Gottfried Engmann und seiner Ehefrau Emma Anna, geborene Schmidt, in Dettingen am Main geboren. Die Volksschule besuchte ich von April 1951 an in Frankfurt am Main. Dort trat ich im April 1955 in das Ziehen-Realgymnasium ein, an dem ich im Februar 1964 die Reifeprüfung ablegte.

Im Sommersemester 1964 immatrikulierte ich mich an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt als Student der Germanistik. Im Winter semester wechselte ich zur Naturwissenschaftlichen Fakultät und nahm das Mathematikstudium auf. Im Juli 1966 bestand ich die Diplom-Vorprüfung, im Dezember 1968 die Diplom-Hauptprüfung in Mathematik.

Von September 67 bis Dezember 68 war ich wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Seminar und seit dem 1. Januar 69 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für angewandte Mathematik in Frankfurt. Seit November 7 bin ich Wissenschaftlicher Assistent an der Fakultät fü Mathematik der Universität Bielefeld.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren

Professoren Drs. H. Dinges, H. Rost,

R. Baer, F.W. Bauer, E.-A. Behrens, W. Benz,

G. Köthe, W. Martienssen, B. Mrowka,

D.W. Müller, C.P. Schnorr, F. Stummel.